CAPÍTULO 7

Elementos que almacenan energía

Introducción El almacenamiento de energía en elementos del circuito eléctrico es otro aspecto en el desarrollo de circuitos flexibles y útiles. En este capítulo se describen las características de dos elementos que almacenan energía: el inductor y el capacitor. Los ingenieros eléctricos han venido usando ampliamente estos dos elementos durante más de 100 años.

Podríamos decir que el almacenamiento de energía en elementos del circuito eléctrico es análogo al almacenamiento de información en una libreta de apuntes o en una gaveta de archivero. Como se verá, la energía almacenada puede recuperarse y usarse posteriormente para propósitos complejos. Al agregar inductores y capacitores al ya conocido resistor, se está en posibilidad de construir circuitos eléctricos importantes y útiles. Puesto que estos circuitos suelen tener uno o más interruptores que se abren o cierran en tiempos específicos, también se examinarán los efectos de su cambio de posición sobre el comportamiento del circuito.

7.1 RETO DE DISEÑO

INTEGRADOR E INTERRUPTOR

En este problema de diseño se examina un integrador y un interruptor controlado por voltaje.

Un integrador es un circuito que efectúa la operación matemática de integración. La salida de un integrador, $v_{sal}(t)$, se relaciona con su entrada, $v_f(t)$, mediante la ecuación

$$v_{sal}(t_2) = K \cdot \int_{t_1}^{t_2} v_f(t)\, dt + v_{sal}(t_1) \qquad (7.1\text{-}1)$$

La constante K es lo que se llama la ganancia del integrador.

Las aplicaciones de los integradores son muchas. Una es medir un intervalo de tiempo. Supóngase que $v_f(t)$ es un voltaje constante, V_f. Entonces

$$v_{sal}(t_2) = K \cdot (t_2 - t_1) \cdot V_f + v_{sal}(t_1) \qquad (7.1\text{-}2)$$

Esta ecuación indica que la salida del integrador en el momento t_2 es una medida del intervalo de tiempo $t_2 - t_1$.

Los interruptores se pueden controlar electrónicamente. La figura 7.1-1 muestra uno de un polo un tiro controlado electrónicamente. El símbolo eléctrico de la figura 7.1-1*a* se usa, a veces, para indicar que está controlado electrónicamente. El voltaje de nodo $v_c(t)$ se llama voltaje de control. En la figura 7.1-1*b* se ve un voltaje de control típico. En este caso, el interruptor controlado por voltaje cierra cuando $v_c(t) = v_A$, y abre cuando $v_c(t) = v_B$. El interruptor de la figura está abierto antes de t_1. Cierra en el momento t_1 y permanece cerrado hasta el momento t_2. El interruptor abre en ese instante y queda abierto.

En la figura 7.1-2, el voltaje $v_c(t)$ controla al interruptor. El integrador convierte al intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ en un voltaje que se indica en el vóltmetro. El intervalo que se va a medir puede ser desde 5 ms hasta 200 ms. El reto es diseñar el integrador. Entre los componentes disponibles se tienen:

- resistores normales de 2% de tolerancia (véase el Apéndice E),
- capacitores de 1 μF, 0.2 μF y 0.1 μF,

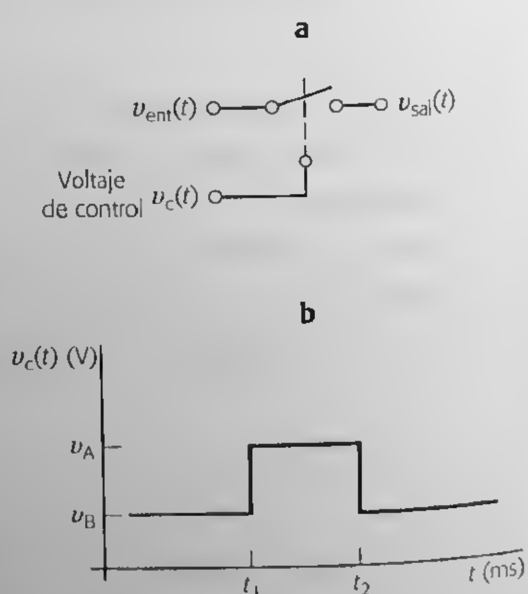


FIGURA 7.1-1
Interruptor controlado por voltaje. (*a*) Su símbolo eléctrico. (*b*) Voltaje típico de control.

- amplificadores operacionales,
- fuentes de alimentación de +15 V y −15 V,
- potenciómetros de 1 kΩ, 10 kΩ y 100 kΩ,
- interruptores de un polo un tiro controlados por voltaje.

DESCRIBIR LA SITUACIÓN Y LAS SUPOSICIONES
Conviene que la salida del integrador sea cero en el momento t_1. La relación entre el voltaje de salida del integrador y el intervalo de tiempo debe de ser sencilla. En vista de lo anterior, sea

$$v_{sal}(t_2) = \frac{10\text{ V}}{200\text{ ms}} \cdot (t_2 - t_1) \qquad (7.1\text{-}3)$$

En la figura 7.1-2 se ve que $V_f = 5$ V. Al comparar las ecuaciones 7.1-2 y 7.1-3 se obtiene

$$K \cdot V_f = \frac{10\text{ V}}{200\text{ ms}} \quad \text{y en consecuencia} \quad K = 10\frac{1}{s} \qquad (7.1\text{-}4)$$

PLANTEAR EL OBJETIVO
Diseñar un integrador que satisfaga las ecuaciones

$$K = 10\frac{1}{s} \quad \text{y} \quad v_{sal}(t_1) = 0 \qquad (7.1\text{-}5)$$

Se necesita un elemento almacenador de energía, que puede ser capacitor o inductor, para construir el integrador. En este capítulo se describirán estos elementos. La solución de este problema de diseño se pospondrá hasta el final del capítulo, después de explicar los capacitores y los inductores.

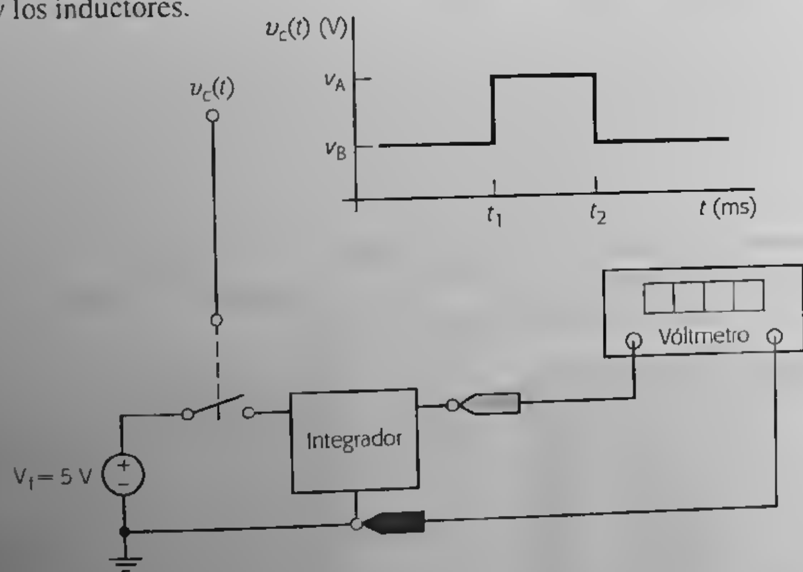


FIGURA 7.1-2
Integrador para medir un intervalo de tiempo.

7.2 Dispositivos que almacenan energía eléctrica

El almacenamiento de energía eléctrica en dispositivos se ha venido practicando desde los tiempos de la botella de Leyden. Parte de la energía almacenada en estos dispositivos puede liberarse más tarde y suministrarse a una carga.

En 1746, Pieter van Musschenbrock, profesor de física en Leyden, Holanda, almacenó carga en una botella con agua. Esta carga podía liberarse después, para producir una descarga o un choque. Había llegado la botella de Leyden, el primer capacitor artificial, base de los

primeros medios para almacenar carga eléctrica. Se demostró que la carga almacenada era inversamente proporcional al espesor del vidrio y directamente proporcional al área superficial de los conductores. Durante algún tiempo se creyó que el vidrio era esencial, hasta que en 1762 se demostró que no era necesario, cuando se fabricó el primer capacitor de placas paralelas con dos placas grandes cubiertas con hoja metálica. La botella de Leyden, sola o agrupada en bancos de capacitores, vino a formar parte del equipo normal de laboratorio.

Con el desarrollo del capacitor primitivo, Charles Augustin de Coulomb y otros investigaron el concepto de almacenamiento de carga, a medida que desarrollaban la primera teoría de la electricidad. El estudio de la electricidad se enfocó en la descripción cuantitativa con el trabajo de Coulomb, quien consiguió establecer las ideas de la electrostática. Henry Cavendish demostró la ley del cuadrado inverso de la electrostática, entre 1772 y 1773, y realizó detalladas mediciones de capacitancia y conductividad. No obstante, no publicó sus hallazgos, que salieron a la luz sólo cuando Maxwell los publicó en 1879.

Muchos científicos se interesaron también en la teoría de la fuerza magnética. Hans Christian Oersted, profesor de la Universidad de Copenhague, descubrió el campo magnético asociado a una corriente eléctrica. Estableció el hecho fundamental de que la aguja de una brújula sólo se afectaba cuando fluía una corriente en las cercanías y no por la sola presencia de un voltaje o una carga. Concluyó que el campo magnético era circular y se repartía en el espacio alrededor del alambre. Oersted, que aparece en la figura 7.2-1, publicó primero su descubrimiento en latín, en un documento fechado el 21 de julio de 1820.

Los resultados del descubrimiento de Oersted se difundieron rápidamente. En una demostración pública realizada en septiembre de 1820, se encontraba André Marie Ampère entre la audiencia. Semanas más tarde, Ampère publicó un escrito sobre la acción mutua de una corriente eléctrica y un imán, y demostró que cuando dos bobinas conducían corriente se comportaban como imanes.

Michael Faraday y Sir Humphrey Davy repitieron los experimentos de Oersted en 1821 en la British Royal Institution. Los experimentos de Faraday con el magnetismo y la electricidad continuaron durante décadas. Construyó un anillo de hierro con dos bobinas devanadas en lados opuestos. El 29 de agosto de 1831 conectó un devanado a una batería y el otro a un galvanómetro y advirtió la naturaleza transitoria de la corriente inducida en el segundo devanado, que sólo ocurría cuando la corriente del primero se iniciaba o se detenía, y al conectar o desconectar la batería. Faraday dio cuenta de su trabajo a la Royal Society el 24 de noviembre de 1831 y lo publicó en 1832. Faraday aparece en la figura 7.2-2. En su honor, la unidad de capacitancia se denomina farad.

FIGURA 7.2-1
Hans C. Oersted (1777-1851), el primero en estudiar los efectos magnéticos de una corriente eléctrica. Cortesía de *Burndy Library*.

FIGURA 7.2-2
Los descubrimientos eléctricos de Michael Faraday no fueron su único legado; la relación publicada de éstos inspiró mucho del trabajo científico de fines del siglo XIX. Su *Experimental Researches in Electricity* sigue siendo hoy una de las mayores descripciones de trabajo científico jamás escritas. Cortesía de *Burndy Library*.

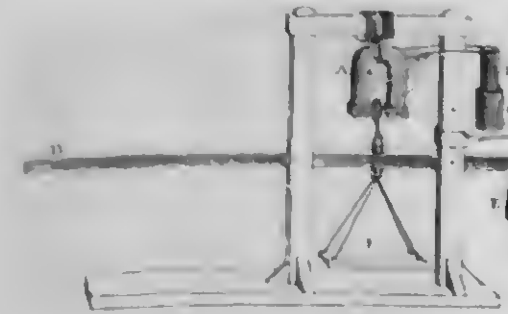


FIGURA 7.2-3
Electroimán de Joseph Henry. Se aplica corriente directa de la pila voltaica (B-C) a una bobina devanada alrededor de un núcleo de hierro en forma de herradura (A) para producir un poderoso electroimán. De Joseph Henry. *Galvanic Multiplier*. Cortesía de *Burndy Library*.

Durante el mismo periodo, el estadounidense Joseph Henry estaba investigando el electromagnetismo. Durante los años 1827 a 1831, Henry estudió los efectos del magnetismo con electroimanes tales como el que muestra la figura 7.2-3. Aunque Faraday merece el crédito por el descubrimiento de la inducción electromagnética entre dos bobinas, fue Henry quien descubrió la autoinducción con una sola bobina. Henry advirtió el principio de la autoinducción cuando se produjo una fuerte chispa al desconectar un largo devanado de alambre de una batería. Henry fue honrado al dársele su nombre a la unidad de autoinducción. En 1847 se convirtió en el primer director de la Smithsonian Institution, donde permaneció 32 años.

7.3 Capacitores

Un capacitor es un elemento de dos terminales formado por dos placas conductoras separadas por un material no conductor. La carga eléctrica se almacena en las placas, como se muestra en la figura 7.3-1, el espacio entre las placas se llena con un material dieléctrico. El valor de la capacitancia es proporcional a la constante dieléctrica y al área superficial del material dieléctrico e inversamente proporcional a su espesor. Para obtener mayor capacitancia es necesaria una estructura muy delgada con un área grande. Para esta configuración, la capacitancia C puede definirse como

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

donde ϵ es la constante dieléctrica, A el área de las placas y d el espacio entre las placas. En la tabla 7.3-1 se dan las constantes dieléctricas de algunos materiales. (La constante dieléctrica es una propiedad que determina la energía almacenada por unidad de volumen por unidad de diferencia de voltaje a través de un capacitor.) La *permitividad*, que también se usa mucho, es sinónimo de la constante dieléctrica (Dorf 1998).

La carga $+q$ en una placa se define como idéntica a $-q$ en la otra. El voltaje v de la batería suministra la energía para mover la carga q hasta la placa positiva desde la otra placa. El

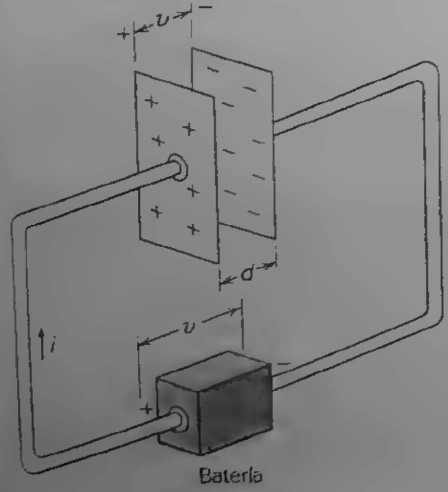


FIGURA 7.3-1
Capacitor conectado a una batería.

Tabla 7.3-1 Constante dieléctrica relativa ϵ_r

MATERIAL	$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$*
Vidrio	7
Nylon	2
Baquelita	5

*ϵ_0 = permitividad del espacio libre = 8.85×10^{-12} farad/metro.
La constante dieléctrica también se llama permitividad relativa.

capacitor se ha cargado al voltaje v, que será proporcional a la carga q. Por tanto, se escribe

$$q = Cv \tag{7.3-1}$$

donde C es la constante de proporcionalidad, denominada capacitancia. La unidad de capacitancia es el coulomb por volt y se llama farad (F) en honor a Faraday. Un capacitor es un elemento lineal si conserva la relación representada por la ecuación 7.3-1.

Capacitancia es una medida de la propiedad de un dispositivo de almacenar energía en forma de cargas separadas o de un campo eléctrico.

Cuando se conecta por primera vez una batería al capacitor de la figura 7.3-1, fluye una corriente mientras las cargas pasan de una placa a la otra. Dado que por convención la corriente i es un flujo de cargas positivas, se puede representar i como aparece en la figura 7.3-1. Puesto que la corriente es

$$i = \frac{dq}{dt}$$

la ecuación 7.3-1 se deriva para obtener

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{7.3-2}$$

La ecuación 7.3-2 es la relación corriente-voltaje para un modelo de capacitor y puede demostrarse fácilmente que es una relación lineal. Usando la ecuación 7.3-2 y las propiedades de superposición y homogeneidad, como se describen en la sección 2.3, se demuestra que la relación de un capacitor es la de un elemento lineal.

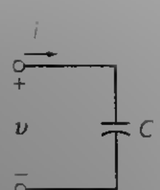


FIGURA 7.3-2
Símbolo de un capacitor.

Cuando la corriente fluye hacia la placa izquierda, hace que la placa (o su terminal) adquiera un voltaje positivo con respecto a la placa derecha. El símbolo de un capacitor aparece en la figura 7.3-2. De nuevo, la convención pasiva del signo supone que la corriente fluye hacia la terminal positiva del capacitor, como se muestra en la figura 7.3-2.

En resumen, un *capacitor* puede definirse como un elemento de dos terminales cuyo propósito primario es introducir capacitancia en un circuito eléctrico. La capacitancia se define como la razón de la carga almacenada a la diferencia de voltaje entre dos placas conductoras o alambres, $C = q/v$.

Los capacitores usan diversos dieléctricos y se construyen de varias formas (Trotter, 1988). Algunos capacitores comunes usan papel impregnado como dieléctrico, mientras otros usan hojas de mica, cerámica y películas orgánicas y metálicas. En la figura 7.3-3 se muestran capacitores miniatura de película metálica. En la figura 7.3-4 se muestran capacitores de policarbonato herméticamente sellados.

Existe una amplia gama de valores de capacitores. Dos tramos de alambre aislado y trenzado de una pulgada de largo, tendrán una capacitancia de aproximadamente 1 picofarad. Por otra parte, un capacitor de potencia de una pulgada de diámetro y unas cuantas pulgadas de largo podría tener una capacitancia de 0.01 F.

FIGURA 7-3-3
Capacitores miniatura de película metálica que van de 1 mF a 50 mF.
Cortesía de *Electronic Concepts Inc.*

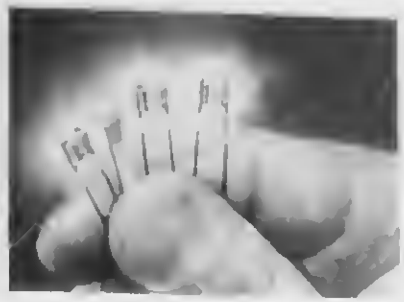


FIGURA 7-3-4
Capacitores miniatura de policarbonato herméticamente sellados que van de 1 mF a 50 mF. Cortesía de *Electronic Concepts Inc.*

Examinando la ecuación 7.3-2, se advierte que un circuito tendrá una corriente i que depende de la derivada del voltaje v a través del capacitor.

Si el voltaje es constante, entonces $i = 0$. Si el voltaje en la figura 7.3-2 es

$$v = Kt$$

entonces, dado que K es una constante,

$$i = C\frac{dv}{dt} = CK$$

Se calcula la corriente a través de un capacitor, cuando $v = 5$ sen t V en la figura 7.3-1, en la siguiente forma

$$i = C\frac{dv}{dt} = 5C \cos t \text{ A}$$

Ejemplo 7.3-1

Determine la corriente en un capacitor de $C = 1$ mF cuando el voltaje a través de él es como el representado por la señal que se ve en la figura 7.3-5.

Solución

El voltaje (con unidades de volts) está dado por

$$\begin{aligned} v &= 0 && t \le 0 \\ &= 10t && 0 \le t \le 1 \\ &= 20 - 10t && 1 \le t \le 2 \\ &= 0 && t \ge 2 \end{aligned}$$

Entonces, puesto que $i = C\,dv/dt$, donde $C = 10^{-3}$ F, se obtiene

$$\begin{aligned} i &= 0 && t < 0 \\ &= 10^{-2} && 0 < t < 1 \\ &= -10^{-2} && 1 < t < 2 \\ &= 0 && t > 2 \end{aligned}$$

Por tantu, la corriente resultante es una serie de dos impulsos de magnitud 10^{-2} A y -10^{-2} A, respectivamente, como aparece en la figura 7.3-6.

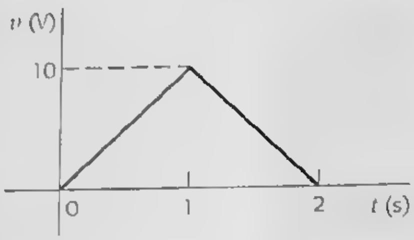


FIGURA 7.3-5
Onda de voltaje a través de un capacitor para el ejemplo 7.3-1. Las unidades son volts y segundos.

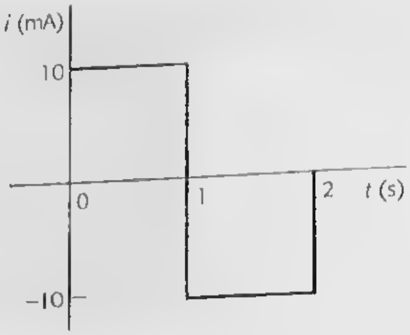


FIGURA 7.3-6
Corriente para el ejemplo 7.3-1.

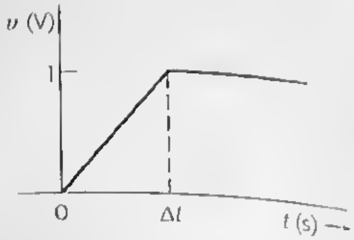


FIGURA 7.3-7
Onda de voltaje donde el cambio de voltaje ocurre durante un incremento de tiempo Δt.

Considérese ahora la onda mostrada en la figura 7.3-7, en donde el voltaje cambia de un valor constante de cero a otro valor constante de uno, durante un incremento de tiempo Δt. Dado que $i = C\,dv/dt$, se obtiene

$$\begin{aligned} i &= 0 && t < 0 \\ &= C(1/\Delta t) && 0 < t < \Delta t \\ &= 0 && t > \Delta t \end{aligned}$$

Así, se obtiene un pulso cuya altura es igual a $C/\Delta t$. Al decrecer Δt, la corriente crecerá. Obviamente, Δt no puede reducirse hasta cero porque se tendría una corriente infinita. Esta corriente es imposible, puesto que requeriría de potencia infinita y que en las terminales del capacitor ocurriera un movimiento instantáneo de la carga. De acuerdo con las condiciones de conservación de la carga, la cantidad de ésta no puede cambiar instantáneamente. Por tanto, no es posible un cambio de voltaje instantáneo ($\Delta t = 0$) a través del capacitor.

El principio de conservación de la carga establece que la cantidad de carga eléctrica no puede cambiar instantáneamente, por lo que $q(t)$ debe ser continua en el tiempo. Recuérdese que $q(t) = Cv(t)$. Por tanto, el voltaje a través del capacitor no puede cambiar instantáneamente; es decir, no puede haber una discontinuidad en $v(t)$.

El voltaje a través de un **capacitor** no puede cambiar instantáneamente.

Para calcular el voltaje $v(t)$ en función de $i(t)$ se integran ambos lados de la ecuación 7.3-2 y se obtiene

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,d\tau \qquad (7.3\text{-}3)$$

Esta ecuación dice que el voltaje en el capacitor $v(t)$, se puede obtener integrando la corriente desde $\tau = -\infty$ hasta $\tau = t$. Para lograr esto se necesita conocer el valor de la corriente del capacitor desde $\tau = -\infty$ hasta $\tau = t$. A menudo no se conoce el valor de la corriente desde $\tau = -\infty$. En lugar de eso, la integral se separa en dos partes

$$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i\,d\tau = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0) \qquad (7.3\text{-}4)$$

La ecuación dice que el voltaje en el capacitor $v(t)$, se puede obtener integrando la corriente desde $\tau = t_0$ hasta $\tau = t$, dado que también se conoce el voltaje del capacitor en t_0. Ahora sólo se requiere conocer la corriente desde $\tau = t_0$ hasta $\tau = t$. El tiempo t_0 se conoce como **tiempo inicial**, y el voltaje en el capacitor $v(t_0)$ se denomina **condición inicial**. Frecuentemente, es conveniente seleccionar $t_0 = 0$ como el tiempo inicial.

Ejemplo 7.3-2

Determine el voltaje v en un capacitor $C = 1/2$ F cuando la corriente es como aparece en la figura 7.3-8 y $v(t_0) = v(0) = 0$.

Solución

Primero, se escribe la ecuación de $i(t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} i &= 0 && t \le 0 \\ &= t && 0 \le t \le 1 \\ &= 1 && 1 \le t \le 2 \\ &= 0 && 2 \le t \end{aligned}$$

Entonces, puesto que

$$v = \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau$$

y $C = 1/2$,

$$\begin{aligned} v &= 0 && t \le 0 \\ &= 2\int_0^t \tau\,d\tau && 0 \le t \le 1 \\ &= 2\int_1^t (1)d\tau + v(1) && 1 \le t \le 2 \\ &= v(2) && 2 \le t \end{aligned}$$

con unidades de volts. Por tanto, para $0 < t \le 1$, se tiene,

$$v = t^2$$

En el periodo $1 \le t \le 2$, se ve que $v(1) = 1$ y entonces se tiene

$$v = 2(t - 1) + 1 = (2t - 1)\text{ V}$$

La onda de voltaje resultante aparece en la figura 7.3-9. El voltaje cambia según t^2 durante el primer segundo, cambia linealmente con t entre 1 y 2 segundos y se mantiene constante igual a 3 V después de $t = 2$ s.

Los capacitores reales tienen asociada cierta resistencia. Por fortuna, es fácil incluir efectos resistivos aproximados en los modelos de los circuitos. En los capacitores, el material dieléctrico entre las placas no es un aislante perfecto y tiene una pequeña conductividad. Esto puede representarse con una gran resistencia en paralelo con el capacitor. Los capacitores ordinarios pueden conservar una carga durante horas por lo que la resistencia en paralelo es de cientos de megaohms. Por esta razón, la resistencia asociada con un capacitor suele ignorarse. Es importante advertir que la onda de voltaje no puede cambiar instantáneamente, pero la onda de corriente sí puede hacerlo.

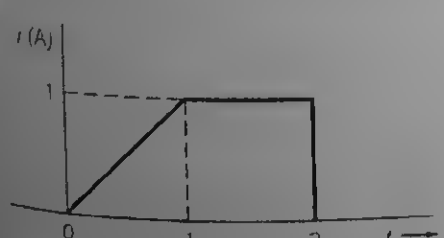


FIGURA 7.3-8
Onda de corriente para el ejemplo 7.3-2. Las unidades son amperes y segundos.

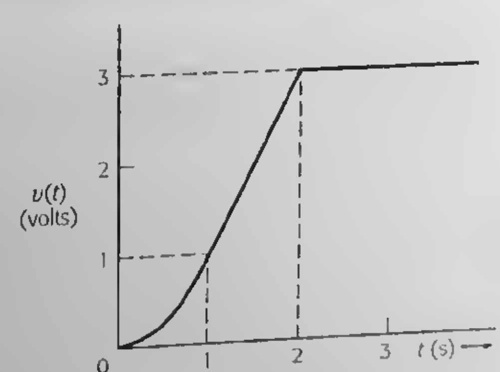


FIGURA 7.3-9
Onda de voltaje para el ejemplo 7.3-2.

Ejemplo 7.3-3
En la figura 7.3-10 se muestra un circuito junto con dos gráficas. Las gráficas representan la corriente y el voltaje del capacitor en el circuito. Determinar el valor de la capacitancia del capacitor.

Solución
La corriente y el voltaje del capacitor están relacionadas por

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau + v(t_0) \tag{7.3-5}$$

o bien

$$v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau \tag{7.3-6}$$

Puesto que $i(t)$ y $v(t)$ están representadas gráficamente, es decir por curvas en lugar de ecuaciones, es útil interpretar la ecuación 7.3-6 usando

$v(t) - v(t_0) =$ la diferencia entre los valores del voltaje en los tiempos t y t_0

y

$\int_{t_0}^{t} i(\tau)\; d\tau =$ el área bajo la gráfica de $i(t)$ contra t, para el tiempo entre t y t_0

Selecciónense los valores convenientes t y t_0, por ejemplo $t_0 = 1$ s y $t = 3$ s. Entonces

$$v(t) - v(t_0) = -1 - (-3) = 2 \text{ V}$$

y

$$\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau = \int_{1}^{3} 0.05\,d\tau = (0.05)(3-1) = 0.1 \text{ A}\cdot\text{s}$$

Usando la ecuación 7.3-6 se obtiene que

$$2 = \frac{1}{C}(0.1) \quad\Rightarrow\quad C = 0.05\,\frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{V}} = 0.05 \text{ F} = 50 \text{ mF}$$

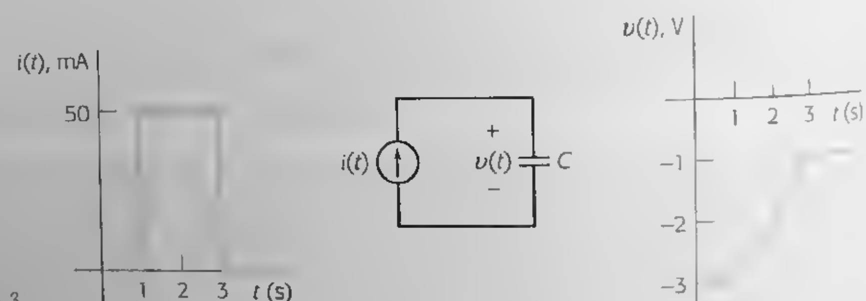


FIGURA 7.3-10
El circuito y las gráficas consideradas en el ejemplo 7.3-3.

¡Inténtalo tú mismo! En los ECSA hay más Problemas y WE

Ejemplo 7.3-4
En la figura 7.3-11 se muestra un circuito junto con dos gráficas. Las gráficas representan la corriente y el voltaje del capacitor en el circuito. Determinar los valores de las constantes a y b usadas en la gráfica de la corriente del capacitor.

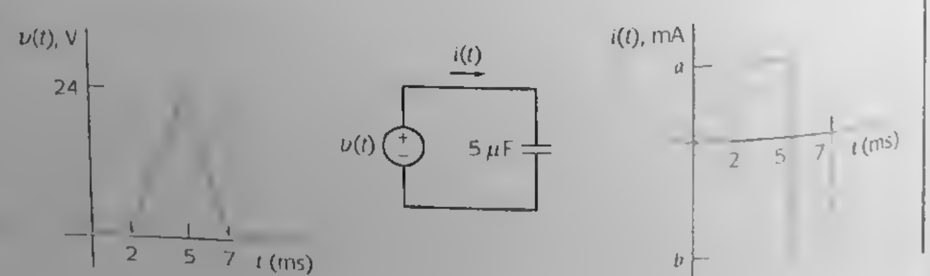


FIGURA 7.3-11
El circuito y las gráficas consideradas en el ejemplo 7.3-4.

Solución

La corriente y el voltaje del capacitor están relacionadas por

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t) \tag{7.3-7}$$

Puesto que $i(t)$ y $v(t)$ están representadas gráficamente, es decir por curvas en lugar de ecuaciones, es útil interpretar la ecuación 7.3-7 como

$$\text{el valor de } i(t) = C \times \text{la pendiente de } v(t)$$

Para determinar el valor de a, se selecciona el momento cuando $i(t) = a$ y la pendiente de $v(t)$ es fácilmente determinada. Por ejemplo, en $t = 3$ ms,

$$\frac{d}{dt}v(0.003) = \frac{0-24}{0.002-0.005} = 8000\frac{\text{V}}{\text{s}}$$

(La notación $\frac{d}{dt}v(0.003)$ indica que la derivada $\frac{d}{dt}v(t)$ está evaluada en el tiempo $t = 0.003$ s.) Usando la ecuación 7.3-7 se obtiene que

$$a = (5 \times 10^{-6})\,(8000) = 40\text{ mA}$$

Para determinar el valor de b, se selecciona $t = 6$ ms,

$$\frac{d}{dt}v(0.006) = \frac{24-0}{0.005-0.007} = 12\times10^{3}\frac{\text{V}}{\text{s}}$$

Usando la ecuación 7.3-7 resulta que

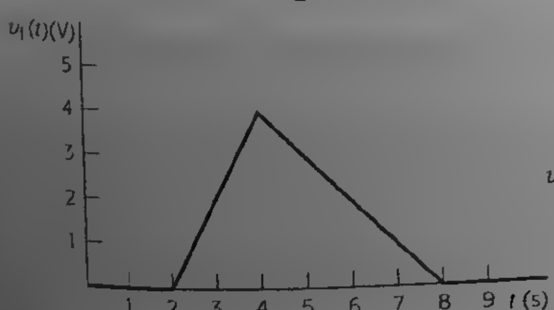
$$b = (5 \times 10^{-6})\,(12 \times 10^{3}) = 60\text{ mA}$$

¡Inténtalo tú mismo! En los ECSA hay más Problemas y WE

Ejercicio 7.3-1 Determine la corriente $i(t)$ para $t > 0$ para el circuito que se muestra en la figura E 7.3-1b cuando $v_f(t)$ es el voltaje que se muestra en la figura E 7.3-1a.
Sugerencia: Determine $i_C(t)$ e $i_R(t)$ por separado, entonces use LCK.

Respuesta: $v(t) = \begin{cases} 2t-2 & 2<t<4 \\ 7-t & 4<t<8 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$

a



b

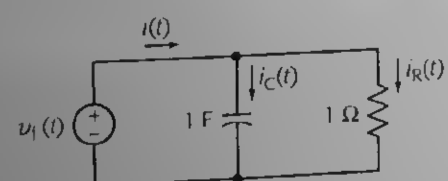


FIGURA E 7.3-1
(*a*) Voltaje de la fuente. (*b*) El circuito.

Ejercicio 7.3-2 Determine el voltaje $v(t)$ para $t > 0$ para el circuito que se muestra en la figura E 7.3-2*b* cuando $i_f(t)$ es la corriente que se muestra en la figura E 7.3-2*a*. El voltaje del capacitor en el tiempo $t = 0$ es $v(0) = -12$ V.

Respuesta:
$$v(t) = \begin{cases} 3\int_0^t 4d\tau - 12 = 12t - 12 & \text{para} \quad 0 \le t \le 4 \\ 3\int_4^t (-2)d\tau + 36 = 60 - 6t & \text{para} \quad 4 \le t \le 10 \\ 3\int_{10}^t 0d\tau + 0 = 0 & \text{para} \quad 10 \le t \end{cases}$$

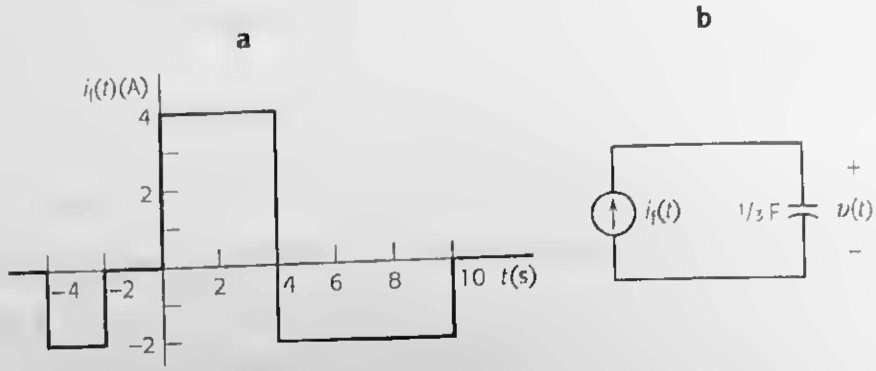


FIGURA E 7.3-2
(*a*) Corriente de la fuente. (*b*) El circuito.

7.4 Almacenamiento de energía en un capacitor

Considérese un capacitor que se ha conectado a una batería con voltaje v. Fluye una corriente y se almacena una carga en las placas del capacitor, como aparece en la figura 7.3-1. Finalmente, el voltaje a través del capacitor llega a ser constante, y la corriente que pasa por él es cero. El capacitor ha almacenado energía entre sus placas en virtud de la separación de sus cargas. Sobre estas cargas actúa una fuerza eléctrica.

Se dice que las fuerzas que actúan sobre las cargas almacenadas en un capacitor provienen de un campo eléctrico. Un *campo eléctrico* se define como la fuerza que actúa sobre una carga unitaria positiva en determinada región. Puesto que las cargas están sometidas a una fuerza que actúa en la dirección x, se advierte que la energía requerida originalmente para separar las cargas está ahora almacenada por el capacitor en el campo eléctrico.

La energía almacenada en un capacitor es

$$w_c(t) = \int_{-\infty}^{t} v\, i\, d\tau$$

Recuérdese que v e i son funciones del tiempo y podrían escribirse como $v(t)$ e $i(t)$. Puesto que

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

se tiene

$$w_c = \int_{-\infty}^{t} vC\frac{dv}{d\tau}\,d\tau = C\int_{v(-\infty)}^{v(t)} v\,dv$$
$$= \frac{1}{2}Cv^2\Big|_{v(-\infty)}^{v(t)}$$

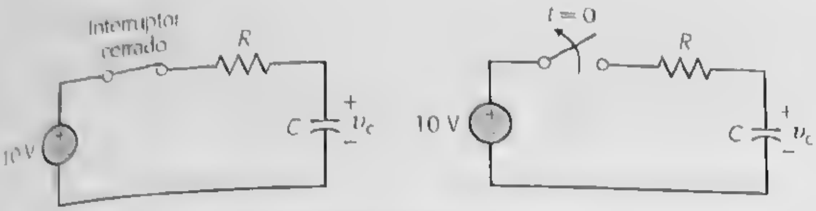


FIGURA 7.4-1 Un circuito donde (a) el capacitor está cargado y $v_c = 10$ V y (b) se abre el interruptor en $t = 0$.

Dado que el capacitor estaba descargado en $t = -\infty$, se establece que $v(-\infty) = 0$. Por tanto,

$$w_c(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \text{ J} \tag{7.4-1}$$

Entonces, a medida que se carga un capacitor y $v(t)$ está cambiando, también cambia la energía almacenada w_c. Nótese que $w_c(t) \geq 0$ para todo $v(t)$ por lo que se dice que el elemento es pasivo.

Puesto que $q = Cv$, la ecuación 7.4-1 puede reescribirse como

$$w_c = \frac{1}{2C} q^2(t) \text{ J} \tag{7.4-2}$$

El capacitor es un elemento que almacena energía, pero que no la disipa. Por ejemplo, considérese un capacitor de 100 mF a través del cual hay un voltaje de 100 volts. La energía almacenada es

$$w_c = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2}(0.1)(100)^2 = 500 \text{ J}$$

En tanto el capacitor permanezca desconectado de cualquier otro elemento, la energía de 500 J se mantiene almacenada. Si ahora se conecta el capacitor a las terminales de un resistor, se espera que la corriente fluya hasta que toda la energía se disipe como calor en el resistor. Tras disiparse toda la energía, la corriente es cero y el voltaje a través del capacitor es cero.

Como se observó en la sección anterior, el requisito de conservación de la carga implica que el voltaje en un capacitor es una variable continua. Entonces, el *voltaje y la carga no pueden cambiar instantáneamente en un capacitor*. Esta proposición se resume con la ecuación

$$v(0^+) = v(0^-)$$

donde el momento inmediatamente antes de que $t = 0$ se llama $t = 0^-$ y el inmediato posterior a $t = 0$, se llama $t = 0^+$. El lapso entre $t = 0^-$ y $t = 0^+$ es infinitamente pequeño. Sin embargo, el voltaje no cambiará en forma brusca.

Para ilustrar la continuidad del voltaje en un capacitor, obsérvese el circuito de la figura 7.4-1. Para el circuito mostrado en la figura 7.4-1*a* el interruptor ha estado cerrado largo tiempo y el voltaje del capacitor ha alcanzado el valor $v_c = 10$ V. En el momento $t = 0$, se abre el interruptor como se muestra en la figura 7.4-1*b*. Dado que el voltaje en el capacitor es continuo,

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 10 \text{ V}$$

Ejemplo 7.4-1

Un capacitor de 10 mF se carga hasta 100 V, como se muestra en el circuito de la figura 7.4-2. Determine la energía almacenada por el capacitor y su voltaje en $t = 0^+$ después de abrir el interruptor.

Solución

El voltaje a través del capacitor es $v = 100$ V cuando $t = 0^-$. Dado que en $t = 0^+$ el voltaje no puede cambiar de su valor en $t = 0^-$, entonces

$$v(0^+) = v(0^-) = 100 \text{ V}$$

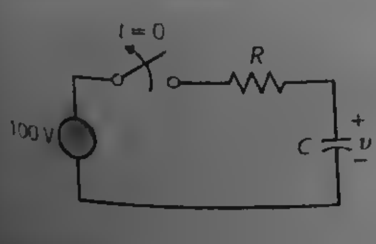


FIGURA 7.4-2 Circuito del ejemplo 7.4-1 con $C = 10$ mF.

La energía almacenada por el capacitor cuando $t = 0^+$ es

$$w_c = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}(10^{-2})(100)^2 = 50 \text{ J}$$

Ejemplo 7.4-2

El voltaje a través de un capacitor de 5 mF varía según se muestra en la figura 7.4-3. Determine y grafique la corriente, la potencia y la energía del capacitor.

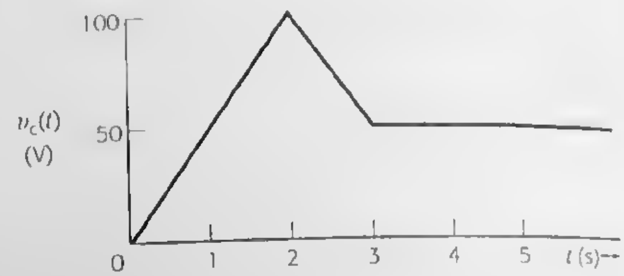


FIGURA 7.4-3
Voltaje a través del capacitor.

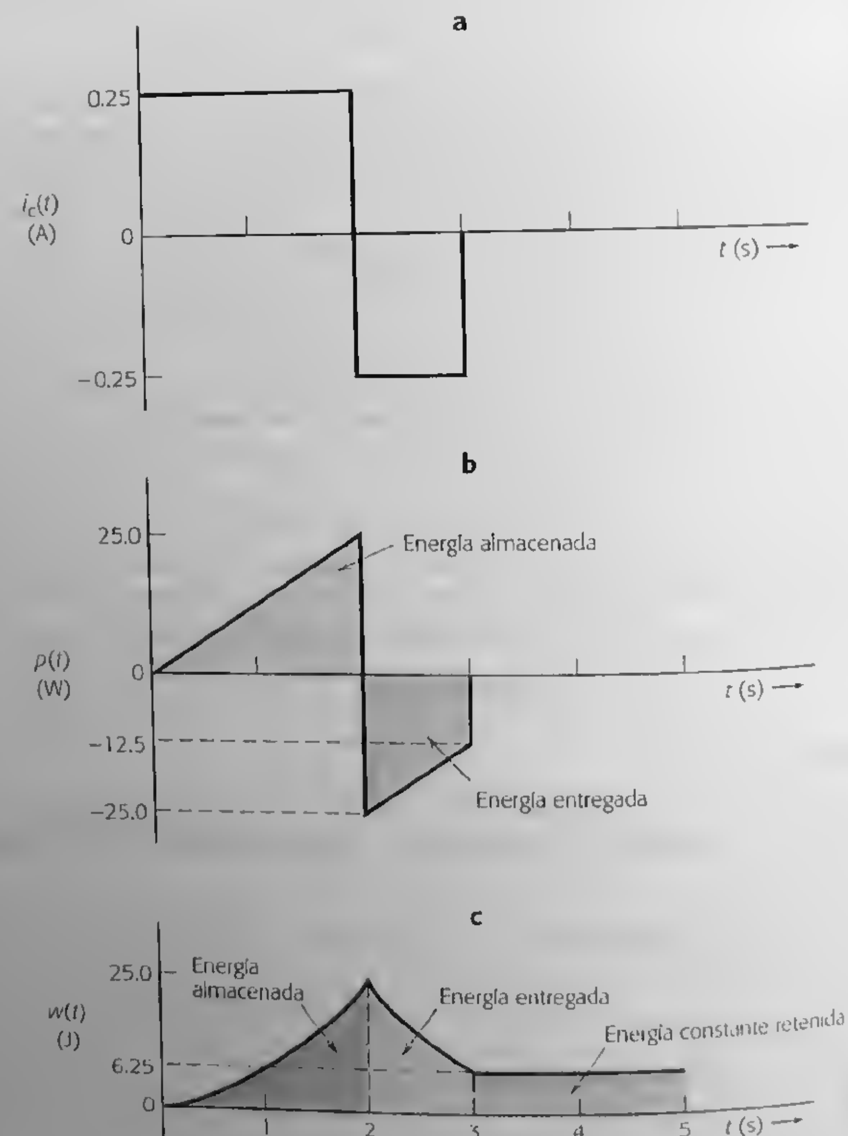


FIGURA 7.4-4
Corriente, potencia y energía del capacitor del ejemplo 7.4-2.

Solución

La corriente se determina con $i_c = C\,dv/dt$ y aparece en la figura 7.4-4*a*. La potencia es $v(t)i(t)$; en consecuencia, es el producto de la curva de corriente (figura 7.4-4*a*) por la curva de voltaje (figura 7.4-3). La potencia aparece en la figura 7.4-4*b*. El capacitor recibe energía durante los dos primeros segundos y después la entrega durante el periodo $2 < t < 3$.

La energía es $\omega = \int p\,dt$ y se determina con el área bajo la curva de $p(t)$. La curva de la energía se muestra en la figura 7.4-4*c*. Nótese que el capacitor almacena energía en forma creciente de $t = 0$ s a $t = 2$ s, y alcanza un máximo de 25 J. Después, el capacitor entrega una energía total de 18.75 J al circuito externo de $t = 2$ s a $t = 3$ s. Por último, el capacitor retiene una energía constante de 6.25 J después de $t = 3$ s.

Ejercicio 7.4-1 Un capacitor de 200 μF se ha cargado a 100 V. Calcule la energía almacenada por el capacitor. Determine su voltaje en $t = 0^+$ si $v(0^-) = 100$ V.

Respuesta: $w(1) = 1$ J; $v(0^+) = 100$ V

Ejercicio 7.4-2 Una corriente constante $i = 2$ A fluye hacia un capacitor de 100 μF tras cerrar el interruptor en $t = 0$. El voltaje del capacitor era igual a cero cuando $t = 0^-$. Calcule la energía almacenada en a) $t = 1$ s y b) $t = 100$ s.

Respuesta: $w(1) = 20$ kJ y $w(100) = 200$ MJ

Ejercicio 7.4-3 El voltaje inicial del capacitor en el circuito de la figura E 7.4-3 es $v_c(0^-) = 3$ V. Determine a) el voltaje $v(t)$ y b) la energía almacenada en el capacitor en $t = 0.2$ s y $t = 0.8$ s cuando

$$i(t) = \begin{cases} 3e^{5t} & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \text{ s} \end{cases}$$

Respuesta: a) $18e^{5t}$ V, $0 \leq t < 1$

b) $w(0.2) = 6.65$ J, $w(0.8) = 2.68$ kJ

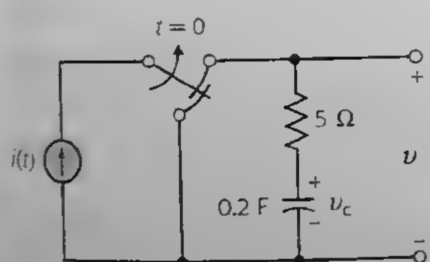


FIGURA E 7.4-3

7.5 Capacitores en serie y en paralelo

Primero, examínese la conexión en paralelo de N capacitores que aparece en la figura 7.5-1. Se desea determinar el circuito equivalente a los N capacitores en paralelo, como se muestra en la figura 7.5-2.

Usando la LCK, se tiene

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N$$

Puesto que

$$i_n = C_n \frac{dv}{dt}$$

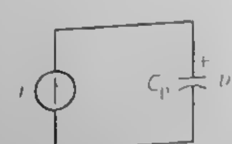


FIGURA 7.5-2
Circuito equivalente para N capacitores en paralelo.

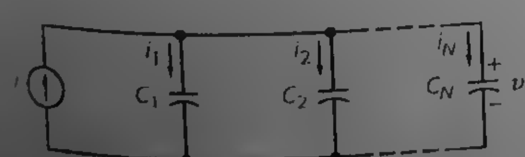


FIGURA 7.5-1
Conexión en paralelo de N capacitores.

y v aparece a través de cada capacitor, se obtiene

$$\begin{aligned} i &= C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \cdots + C_N \frac{dv}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N) \frac{dv}{dt} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} C_n \right) \frac{dv}{dt} \end{aligned} \tag{7.5-1}$$

Para el circuito equivalente de la figura 7.5-2,

$$i = C_p \frac{dv}{dt} \tag{7.5-2}$$

Comparando las ecuaciones 7.5-1 y 7.5-2, es obvio que

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N = \sum_{n=1}^{N} C_n$$

por tanto, la capacitancia equivalente de un conjunto de N capacitores en paralelo no es más que la suma de las capacitancias individuales. Se debe observar que todos los capacitores en paralelo tienen la misma condición inicial, $v(0)$. Nótese la similitud con los resultados determinados en la sección 3.5 para conductancias en paralelo, donde $G_p = \sum G_n$.

Ahora se determinará la capacitancia equivalente, C_s, de un conjunto de N capacitancias conectadas en serie, como se ve en la figura 7.5-3. El circuito equivalente de la serie de capacitores aparece en la figura 7.5-4.

Usando la LVK en la malla de la figura 7.5-3, se tiene

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N \tag{7.5-3}$$

Puesto que, en general

$$v_n(t) = \frac{1}{C_n} \int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v_n(t_0)$$

donde i es común a todos los capacitores, se obtiene

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v_1(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^{t} i\,d\tau + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \int_{t_0}^{t} i\,d\tau + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0) \end{aligned} \tag{7.5-4}$$

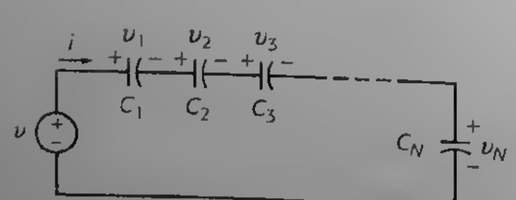


FIGURA 7.5-3
Conexión en serie de N capacitores.

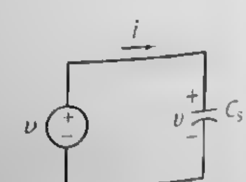


FIGURA 7.5-4
Circuito equivalente para N capacitores en serie.

De la ecuación 7.5-3 se observa que en $t = t_0$

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0) = \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0) \tag{7.5-5}$$

Al sustituir la ecuación 7.5-5 en la 7.5-4

$$v = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n}\right) \int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0) \tag{7.5-6}$$

La LVK para el lazo del circuito equivalente de la figura 7.5-4 da

$$v = \frac{1}{C_s} \int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0) \tag{7.5-7}$$

Comparando las ecuaciones 7.5-6 y 7.5-7, se ve que

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \tag{7.5-8}$$

En el caso de dos capacitores en serie, la ecuación 7.5-8 queda

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

o bien

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{7.5-9}$$

Ejemplo 7.5-1

Determine la capacitancia equivalente para el circuito de la figura 7.5-5 cuando $C_1 = C_2 = C_3 = 2$ mF, $v_1(0) = 10$ V y $v_2(0) = v_3(0) = 20$ V.

Solución

Debido a que C_2 y C_3 están en paralelo, se reemplaza entonces con C_p, donde

$$C_p = C_2 + C_3 = 4 \text{ mF}$$

El voltaje en $t = 0$ a través de la capacitancia equivalente C_P es igual al voltaje a través de C_2 o C_3, que es $v_2(0) = v_3(0) = 20$ V. Al reemplazar C_2 y C_3 por C_P, se obtiene el circuito mostrado en la figura 7.5-6.

Ahora se desea reemplazar los dos capacitores en serie C_1 y C_P por un capacitor equivalente. Utilizando la relación de la ecuación 7.5-9, se obtiene

$$C_s = \frac{C_1 C_p}{C_1 + C_p} = \frac{(2 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-3})}{(2 \times 10^{-3}) + (4 \times 10^{-3})} = \frac{8}{6} \text{ mF}$$

El voltaje a través de C_s, cuando $t = 0$, es

$$v(0) = v_1(0) + v_p(0)$$

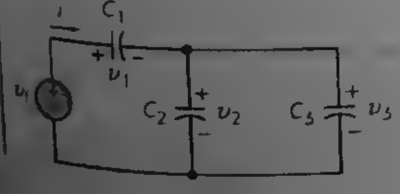


FIGURA 7.5-5
Circuito para el ejemplo 7.5-1.

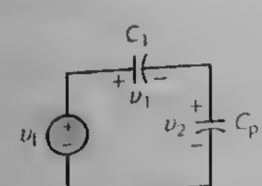


FIGURA 7.5-6
Circuito resultante a partir de la figura 7.5-5 reemplazando C_2 y C_3 con C_P.

donde $v_P(0) = 20$ V, que es el voltaje a través de la capacitancia de C_P en $t = 0$. Por tanto, se obtiene

$$v(0) = 10 + 20 = 30 \text{ V}$$

Entonces, se obtiene el circuito equivalente que aparece en la figura 7.5-7.

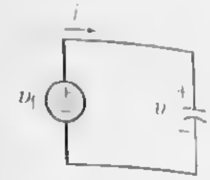


FIGURA 7.5-7
Circuito equivalente para el circuito del ejemplo 7.5-1.

Ejercicio 7.5-1 Calcule la capacitancia equivalente en el circuito de la figura E 7.5-1.
Respuesta: $C_{eq} = 4$ mF

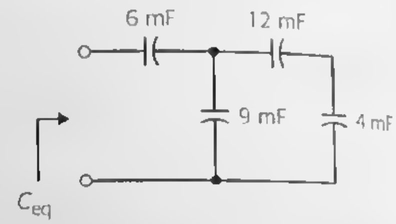


FIGURA E 7.5-1

Ejercicio 7.5-2 Determine la relación para la división de corriente entre dos capacitores en paralelo que aparecen en la figura E 7.5-2.
Respuesta: $i_n = iC_n/(C_1 + C_2)$, $n = 1, 2$

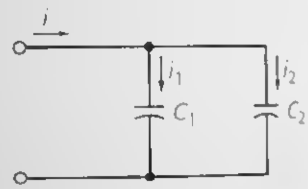


FIGURA E 7.5-2

Ejercicio 7.5-3 Calcule la capacitancia equivalente C_{eq} en el circuito de la figura E 7.5-3.
Respuesta: 10/19 mF

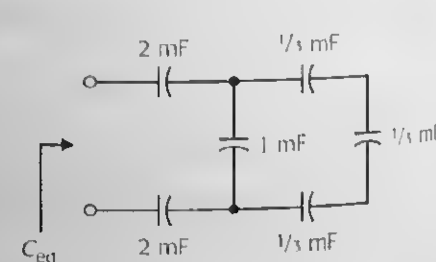


FIGURA E 7.5-3

7.6 Inductores

Un alambre puede enrollarse para formar una bobina o devanado de múltiples vueltas o espiras, como se muestra en la figura 7.6-1. Si se le conecta la fuente de corriente i_f, se determina que el voltaje a través de la bobina es proporcional a la rapidez de cambio de la corriente $i = i_f$, que es la que circula en el inductor. Esta relación proporcional puede expresarse por

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{7.6-1}$$

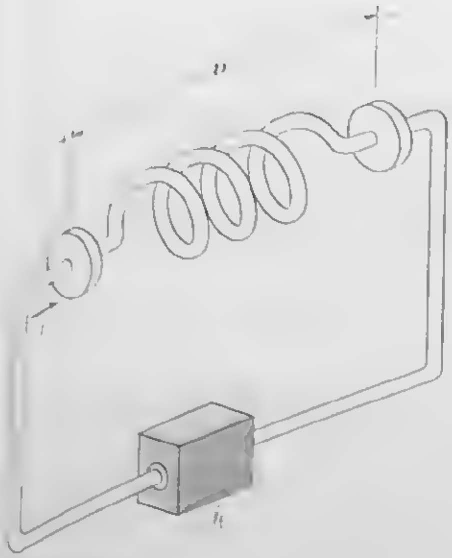


FIGURA 7.6-1
Bobina de alambre conectada a una fuente de corriente.

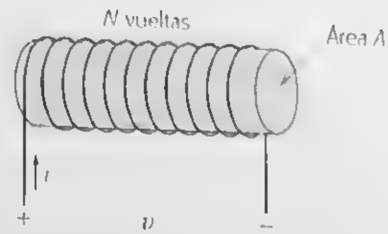


FIGURA 7.6-2
Bobina devanada helicoidalmente sobre un núcleo de área A.

donde L es la constante de proporcionalidad llamada *inductancia* y se mide en henrys (H).

Un *inductor* se define como un elemento de dos terminales formado por un embobinado de N vueltas, que introduce inductancia en un circuito eléctrico. La inductancia se define como la propiedad de un dispositivo eléctrico que hace que el paso de una corriente variable con el tiempo produzca un voltaje a través del mismo.

Un inductor ideal es una bobina con alambre sin resistencia. Cuando existe corriente en el alambre, se almacena energía en el campo magnético que rodea al devanado. Una corriente constante i en la bobina produce un voltaje cero a través de ella. Una corriente variable en el tiempo produce un voltaje autoinducido. Nótese que es imposible un cambio brusco (o instantáneo) de la corriente, puesto que se necesitaría un voltaje infinito.

Las bobinas devanadas helicoidalmente en una sola capa suelen llamarse solenoides. Un ejemplo se muestra en la figura 7.6-2. Cuando la longitud de la bobina es mayor que la mitad del diámetro y el núcleo es de un material no ferromagnético, la inductancia de la bobina está dada por:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l + 0.45d}\,\mathrm{H}$$

donde N es el número de vueltas, A el área transversal en m^2, l la longitud en metros, d el diámetro en metros y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, una constante llamada permeabilidad del espacio libre.

Los núcleos de hierro tienen mayor permeabilidad que el aire, por lo cual concentran el flujo magnético. Este efecto aumenta la inductancia de la bobina.

La fuerza que experimentan dos alambres vecinos que conducen corriente puede describirse por la existencia de un campo magnético, que a su vez puede expresarse en función del flujo magnético que forma un circuito alrededor de la bobina, como se muestra en la figura 7.6-3. En una bobina, asociado con una corriente i, existe un *flujo magnético* $\phi(t)$. En este caso, se tiene una bobina de N vueltas y cada línea de flujo pasa a través de todas ellas. Se dice entonces que el flujo total es $N\phi$.

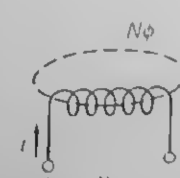


FIGURA 7.6-3
Modelo de un inductor.

Supóngase que la bobina tiene N vueltas y que el material del núcleo tiene una permeabilidad relativamente alta, de manera que el flujo magnético ϕ se concentra en el área A. Según Faraday, el flujo cambiante crea un voltaje inducido en cada vuelta, igual a la derivada del flujo ϕ, de forma que el voltaje total v a través de N vueltas es

$$v = N\frac{d\phi}{dt} \tag{7.6-2}$$

Sin embargo, puesto que el flujo total $N\phi$ es proporcional a la corriente i en la bobina, se tiene

$$N\phi = Li \tag{7.6-3}$$

donde L, la inductancia, es la constante de proporcionalidad. Al sustituir la ecuación 7.6-3 en la 7.6-2, se obtiene

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{7.6-4}$$

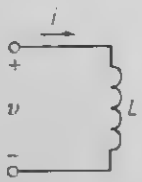


FIGURA 7.6-4
Símbolo de circuito para un inductor.

El símbolo eléctrico de un inductor aparece en la figura 7.6-4. La convención de signo pasivo para un inductor requiere que la corriente fluya hacia la terminal positiva, como se muestra en la figura 7.6-2. Desde el punto de vista del modelado de dispositivos eléctricos, el capacitor es un elemento usado a menudo para representar el efecto de campos eléctricos. De igual forma, el inductor modela los efectos de campos magnéticos.

La **inductancia** es una medida de la capacidad de un dispositivo para almacenar energía en forma de un campo magnético.

FIGURA 7.6-5
Bobina con gran inductancia. Cortesía de *MuRata Company*.

Los inductores incluyen la resistencia real del alambre de cobre usado en la bobina. Debido a esto, los inductores se alejan mucho de los elementos ideales y suelen modelarse con una inductancia ideal en serie con una pequeña resistencia.

En la figura 7.6-5 se muestra un ejemplo de una bobina con una gran inductancia. Los inductores se devanan de varias formas, como se muestra en la figura 7.6-6. Los inductores prácticos tienen inductancias que van desde 1 μH hasta 10 H.

Si se examina la ecuación 7.6-4, se observa que si la corriente i es constante, el voltaje a través del inductor es cero. A medida que la corriente cambie más rápidamente, el voltaje aumentará. Considérese el voltaje de un inductor en el que la corriente cambia cuando $t = 0$, de cero a un valor que crece constantemente y finalmente se estabiliza como se muestra en la figura 7.6-7. Se determinará el voltaje del inductor. La corriente (en amperes) puede describirse como sigue:

$$\begin{aligned} i &= 0 & t &\le 0 \\ &= \frac{10t}{t_1} & 0 \le t &\le t_1 \\ &= 10 & t &\ge t_1 \end{aligned}$$

Tómese un inductor de 0.1 H y calcúlese la onda de voltaje. Dado que $v = L\,di/dt$, se tiene (en volts)

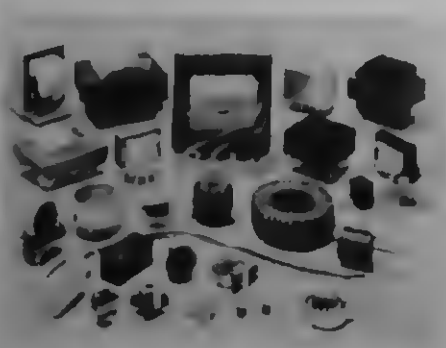


FIGURA 7.6-6
Elementos con inductancias dispuestas en varias formas de devanados. Cortesía de *Dale Electronic Inc.*

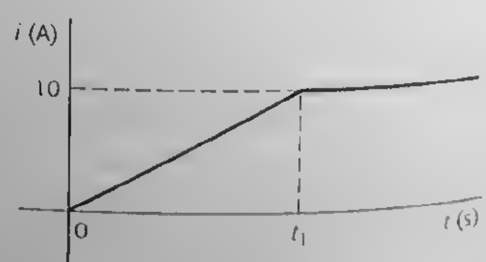


FIGURA 7.6-7
Una onda de corriente. La corriente está en amperes

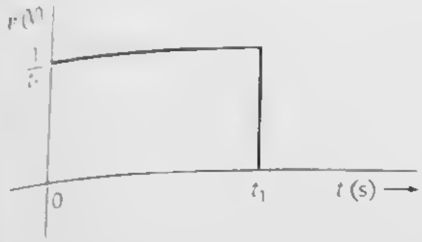


FIGURA 7.6-8
Respuesta de voltaje a la onda de corriente de la figura 7.6-7 cuando $L = 0.1$ H.

$$
\begin{aligned}
v &= 0 && t < 0 \\
&= \frac{1}{t_1} && 0 < t < t_1 \\
&= 0 && t > t_1
\end{aligned}
$$

El pulso de voltaje resultante se muestra en la figura 7.6-8. Nótese que si t_1 disminuye, la magnitud del voltaje aumenta. Es claro que no se puede hacer $t_1 = 0$, puesto que el voltaje requerido se haría infinito y se necesitaría una potencia infinita en las terminales del inductor. Por consiguiente, no es posible que los cambios de la corriente por un inductor sean instantáneos.

Faraday, Ampére y Oersted desarrollaron el concepto de flujo magnético $\phi(t)$ asociado con la corriente en el inductor. Para un inductor lineal, $\phi(t) = Mi(t)$, donde M es una constante. Lo mismo que a un capacitor se aplica el principio de conservación de la carga, a un inductor se aplica el principio de conservación del flujo. Entonces, el flujo $\phi(t)$ no puede tener discontinuidades y, por tanto, $i(t)$ a través del inductor no puede tener discontinuidades.

En una inductancia, la corriente no puede cambiar instantáneamente.

La corriente en un inductor en términos del voltaje a través de él puede determinarse integrando la relación

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{7.6-5}$$

desde t_0 hasta t. De la ecuación 7.6-5 se obtiene

$$di = \frac{v}{L}\,dt$$

Al integrar, se obtiene

$$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0) \tag{7.6-6}$$

donde $i(t_0)$ es la corriente que se acumula de $t = -\infty$ a t_0. Normalmente se elige $t_0 = 0$.

Por ejemplo, considérese la onda de voltaje mostrada en la figura 7.6-9 para un inductor cuando $L = 0.1$ H e $i(t_0) = 2$ A. Puesto que $v(t) = 2$ V entre $t = 0$ y $t = 2$, se tiene

$$i = 10\int_0^t (2)\,d\tau + i(t_0) = 20t + 2 \text{ A}$$

Esta onda de corriente se muestra en la figura 7.6-10.

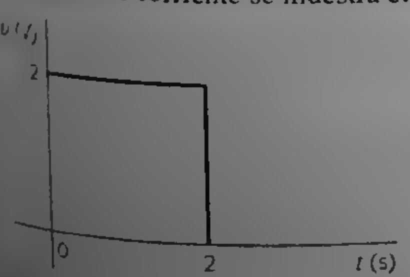


FIGURA 7.6-9
Onda de voltaje para un inductor (en volts).

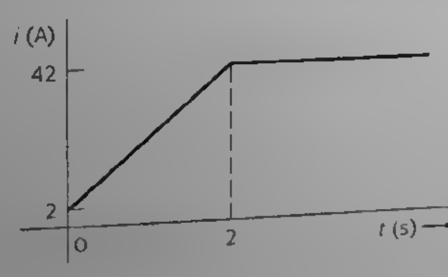


FIGURA 7.6-10
Onda de corriente para un inductor $L = 0.1$ H que corresponde a la onda de voltaje de la figura 7.6-9.

Ejemplo 7.6-1

Determine el voltaje a través de un inductor $L = 0.1$ H, cuando la corriente en el mismo es

$$i = 20te^{-2t}\ \text{A}$$

para $t > 0$ e $i(0) = 0$.

Solución

El voltaje para $t > 0$ es

$$\begin{aligned} v &= L\frac{di}{dt} = (0.1)\frac{d}{dt}(20te^{-2t}) \\ &= 2(-2te^{-2t} + e^{-2t}) = 2e^{-2t}(1 - 2t)\ \text{V} \end{aligned}$$

El voltaje es igual a 2 V cuando $t = 0$, como se muestra en la figura 7.6-11*b*. La onda de corriente aparece en la figura 7.6-11*a*. Nótese que la corriente alcanza un valor máximo y que el voltaje es cero en $t = 0.5$ s.

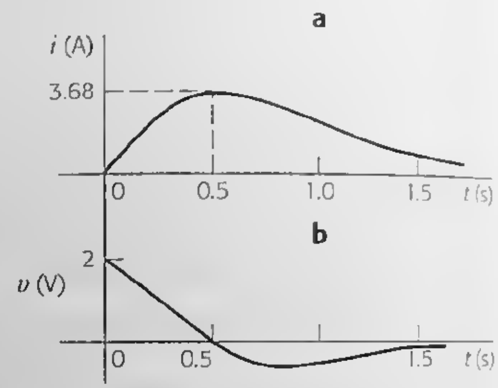


FIGURA 7.6-11
Ondas de voltaje y corriente para el ejemplo 7.6-1.

Ejemplo 7.6-2

En la figura 7.6-12 se muestra un circuito junto con dos gráficas. Las gráficas representan la corriente y el voltaje del inductor en el circuito. Determinar el valor de la inductancia del inductor.

Solución

La corriente y el voltaje del inductor están relacionadas mediante

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau + i(t_0) \tag{7.6-7}$$

o bien

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau \tag{7.6-8}$$

Puesto que $i(t)$ y $v(t)$ están representadas gráficamente, es decir por curvas en lugar de ecuaciones, es útil interpretar la ecuación 7.6-8 usando

$i(t) - i(t_0)$ = la diferencia entre los valores de la corriente en los instantes t y t_0

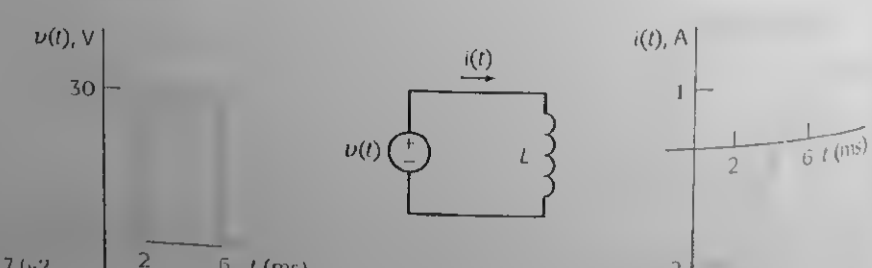


FIGURA 7.6-12
El circuito y las gráficas considerados en el ejemplo 7.6-2.

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau \;=\; \text{el área bajo la gráfica de } v(t) \text{ contra } t \text{ para los tiempos entre } t \text{ y } t_0$$

Se seleccionan valores de t y t_0, por ejemplo, $t_0 = 2$ ms y $t = 6$ ms. Entonces

$$i(t) - i(t_0) = 1 - (-2) = 3 \text{ A}$$

y

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = \int_{0.002}^{0.006} 30\,d\tau = (30)(0.006 - 0.002) = 0.12 \text{ V}\cdot\text{s}$$

Usando la ecuación 7.6-8 se obtiene que

$$3 = \frac{1}{L}(0.12) \;\Rightarrow\; L = 0.040\,\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}} = 0.040 \text{ H} = 40 \text{ mH}$$

¡Inténtalo tú mismo! En los ECSA hay más Problemas y WE

Ejercicio 7.6-1 Indique el voltaje $v(t)$ para $t > 0$ para el circuito de la figura E 7.6-1*b* cuando $i_f(t)$ es la corriente que se muestra en la figura E 7.6-1*a*.
Sugerencia: Determine $v_L(t)$ y $v_R(t)$ por separado, después use LVK.

Respuesta: $v(t) = \begin{cases} 2t - 2 & 2 < t < 4 \\ 7 - t & 4 < t < 8 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$

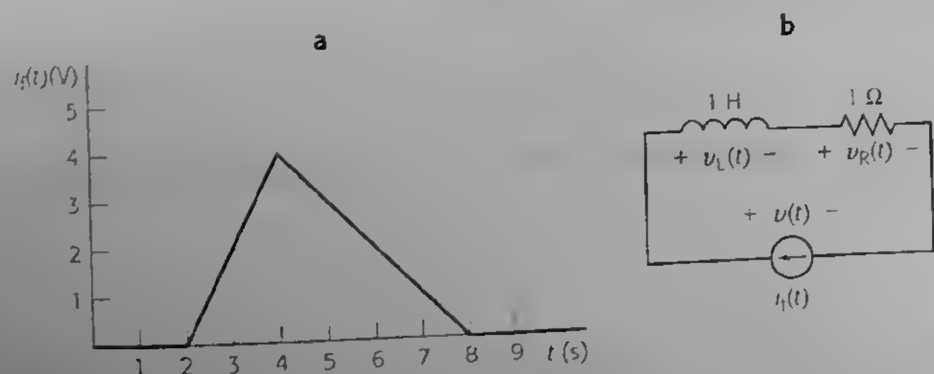
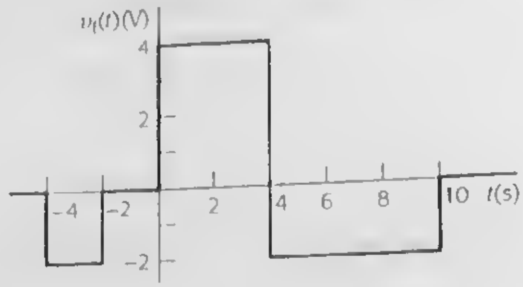


FIGURA E 7.6-1
a, Corriente de la fuente. *b*, El circuito.

Ejercicio 7.6-2 Determine la corriente $i(t)$ para $t > 0$ para el circuito que se muestra en la figura E 7.6-2*b* cuando $v_f(t)$ es el voltaje que se muestra en la figura E 7.6-2*a*. La corriente del inductor en el tiempo $t = 0$ es $i(0) = -12$ A.

Respuesta: $i(t) = \begin{cases} 3\int_0^t 4\,d\tau - 12 = 12t - 12 & \text{para} \quad 0 \le t \le 4 \\ 3\int_4^t (-2)\,d\tau + 36 = 60 - 6t & \text{para} \quad 4 \le t \le 10 \\ 3\int_{10}^t 0\,d\tau + 0 = 0 & \text{para} \quad 10 \le t \end{cases}$

a



b

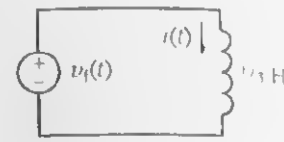


FIGURA E 7.6-2
(*a*) Voltaje de la fuente. (*b*) El circuito.

7.7 Almacenamiento de energía en un inductor

La potencia en un inductor es

$$p = vi = \left(L\frac{di}{dt}\right)i \tag{7.7-1}$$

La energía almacenada en el inductor se encuentra en el campo magnético. La energía almacenada en el inductor durante el intervalo t_0 a t se obtiene por

$$w = \int_{t_0}^{t} p\,d\tau = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i\,di$$

Al integrar la corriente entre $i(t_0)$ e $i(t)$, se obtiene

$$w = \frac{L}{2}\left[i^2(t)\right]_{i(t_0)}^{i(t)} = \frac{L}{2}i^2(t) - \frac{L}{2}i^2(t_0) \tag{7.7-2}$$

Generalmente se selecciona $t_0 = -\infty$ para el inductor y entonces la corriente $i(-\infty) = 0$. Entonces, se tiene

$$w = \frac{1}{2}Li^2 \tag{7.7-3}$$

Nótese que $w(t) \geq 0$ para toda $i(t)$, por lo que el inductor es un elemento pasivo. El inductor no genera ni disipa energía, sólo la almacena. Es importante observar que los inductores y los capacitores, al tener memoria, son fundamentalmente distintos de otros dispositivos que hemos descrito en los capítulos anteriores.

Ejemplo 7.7-1

Determine la corriente en un inductor, $L = 0.1$ H, cuando el voltaje a través del mismo es

$$v = 10te^{-5t}\ \text{V}$$

Supóngase que la corriente es cero para $t \leq 0$.

Solución

En la figura 7.7-1*a* se muestra el voltaje en función del tiempo. Nótese que alcanza un máximo en $t = 0.2$ s.

La corriente es

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + i(t_0)$$

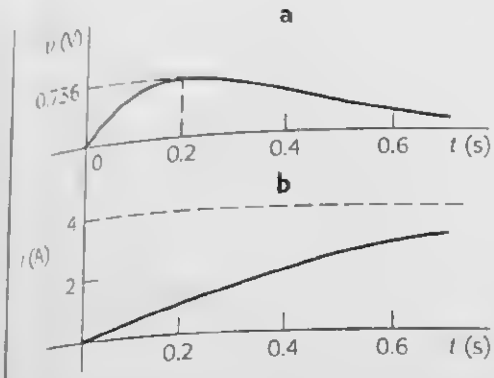


FIGURA 7.7-1
Voltaje y corriente para el ejemplo 7.7-1.

Puesto que el voltaje es cero para $t < 0$, se tiene que la corriente en el inductor, cuando $t = 0$, es $i(0) = 0$. Entonces se tiene

$$i = 10\int_0^t 10\tau e^{-5\tau}d\tau = 100\left[\frac{-e^{-5\tau}}{25}(1 + 5\tau)\right]_0^t = 4(1 - e^{-5t}(1 + 5t))\text{ A}$$

La corriente en función del tiempo se muestra en la figura 7.7-1*b*.

Ejemplo 7.7-2

Calcule la potencia y la energía en un inductor de 0.1 H cuando la corriente y el voltaje son los que muestran las figuras 7.7-2*a* y 7.7-2*b*.

Solución

Primero, se escriben las expresiones de la corriente y del voltaje. La corriente es

$$\begin{aligned} i &= 0 && t < 0 \\ &= 20t && 0 \le t \le 1 \\ &= 20 && 1 \le t \end{aligned}$$

El voltaje se expresa como

$$\begin{aligned} v &= 0 && t < 0 \\ &= 2 && 0 < t < 1 \\ &= 0 && 1 < t \end{aligned}$$

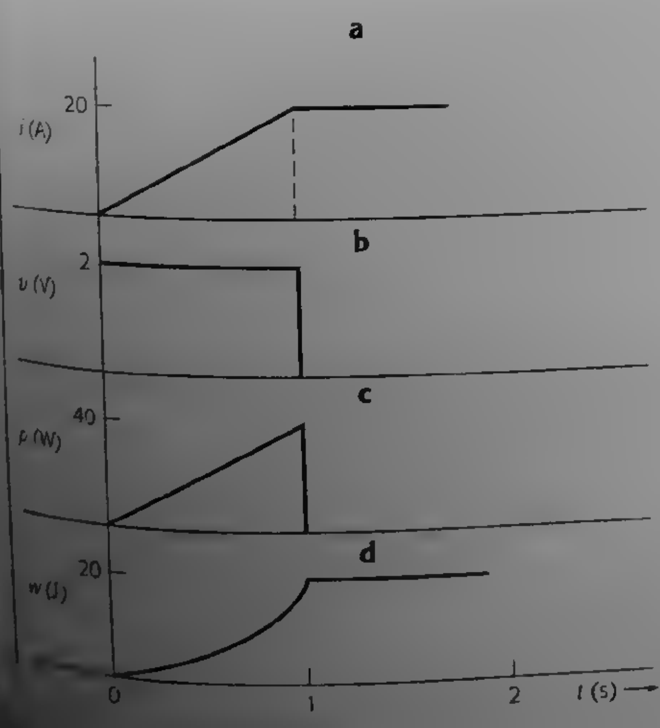


FIGURA 7.7-2
Corriente, voltaje, potencia y energía para el ejemplo 7.7-2.

Se puede verificar el voltaje usando $v = L\,(di/dt)$. Entonces, la potencia es

$$p = vi = 40t \text{ W}$$

cuando $0 \le t < 1$ y cero para cualquier otro tiempo.

Entonces, la energía, en joules, es

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} Li^2 \\ &= 0.05(20t)^2 \quad 0 \le t \le 1 \\ &= 0.05(20)^2 \quad 1 < t \end{aligned}$$

y cero para todo $t < 0$.

La potencia y la energía se muestran en las figuras 7.7-2c y 7.7-2d.

Ejemplo 7.7-3

Determine la potencia y la energía almacenada en un inductor de 0.1 H cuando $i = 20te^{-2t}$ A y $v = 2e^{-2t}(1 - 2t)$ V para $t \ge 0$ e $i = 0$ para $t < 0$. (Véase el ejemplo 7.6-1.)

Solución

La potencia es

$$\begin{aligned} p = iv &= (20te^{-2t})\left[2e^{-2t}(1 - 2t)\right] \\ &= 40te^{-4t}(1 - 2t) \text{ W} \quad t > 0 \end{aligned}$$

Entonces, la energía es

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} Li^2 = 0.05(20te^{-2t})^2 \\ &= 20t^2 e^{-4t} \text{ J} \quad t > 0 \end{aligned}$$

Nótese que w es positiva para todos los valores de $t > 0$. La energía almacenada en el inductor aparece en la figura 7.7-3.

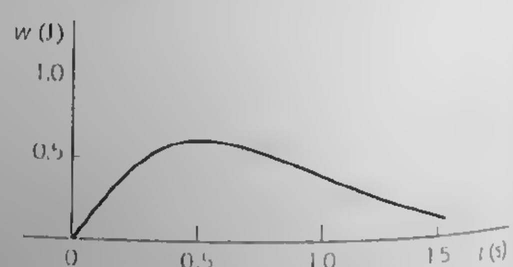


FIGURA 7.7-3
Energía almacenada en el inductor del ejemplo 7.7-3.

Ejercicio 7.7-1 La corriente en un inductor, $L = 1/4$ H, es $i = 4te^{-t}$ A cuando $t \ge 0$ e $i = 0$ cuando $t < 0$. Calcule el voltaje, la potencia y la energía en este inductor.

Respuesta Parcial: $w = 2t^2 e^{-2t}$ J

Ejercicio 7.7-2 La corriente a través del inductor de un circuito de deflexión en el cinescopio de una televisión aparece en la figura E 7.7-2 cuando $L = 1/2$ H. Determine el voltaje, la potencia y la energía en el inductor.

Respuesta Parcial: $p = 2t$ para $0 \le t < 1$

$= 2(t - 2)$ para $1 < t < 2$

$= 0$ para otros t